# TO‘PLAMNING JORDAN O‘LCHOVI VA UNGA OID MISOLLAR

**Xolboyev Azamat**
**Juraboyeva Shoxida**
TDPU Aniq va tabiiy fanlarni o‘qitish metodikasi (matematika) mutaxassisligi
2-bosqich magistri

Biz ko‘plab adabiyotlarda, darsliklarda Lebeg manosidagi o‘lchovli to‘plamlar va ularni xossalari haqida yetarlicha ma’lumotlarga egamiz [1-2]. Lekin boshqa o‘lchovlar va ularning xossalari haqida ma’lumotlar juda kam [2-4]. Bu maqolada Jordan o‘lchovi va to‘plamning Jordan manosidagi o‘lchovini hisoblash haqida bir nechta misollar keltirganmiz.

$E \subset R$ to‘plam Jordan manosida o‘lchovli to‘plam bo‘lishi uchun $E$ to‘plamni o‘z ichiga oluvchi biror $F_1 = [a; b]$ kesma olinadi ($[a; b]$ kesmaning Jordan o‘lchovi $b - a$ ga teng deb qabul qilamiz). Keyin esa, $L_1$, $l_1$ sonlar aniqlanadi. Keyingi qadamda $F_1 = [a; b]$ teng ikkita kesmaga ajratiladi va $L_2$, $l_2$ sonlar aniqlanadi. Bu jarayon huddi shunday davom ettiriladi. *n*-qadamda $F_1 = [a; b]$ to‘plam teng $2^{n-1}$ ta kesmaga bo‘linib $L_n$, $l_n$ sonlar aniqlanadi. Bu yerda $L_n$ *n*-qadamda $E$ to‘plamning kamida elementi qatnashgan kesmachalar sonini kesmachaning uzunligiga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan songa teng. $l_n$ esa, *n*-qadamda barcha elementlari $E$ to‘plamning elementlaridan tashkil topgan kesmachalar sonini kesmachaning uzunligiga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan songa teng. Natijada $\{L_n\}$ va $\{l_n\}$ sonli ketma-ketliklar hosil bo‘ladi. Agar bu ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib ularning limitlari teng bo‘lsa, u holda $E$ to‘plam Jordan manosida o‘lchovli to‘plam deyiladi, aks holda $E$ to‘plam Jordan manosida o‘lchovli to‘plam emas deyiladi.

Biz quyida bir nechta misollar yordamida to‘plamlarning Jordan manosida o‘lchovli yoki o‘lchovli emasligini ko‘rsatamiz.

**1-misol.** $E = (a; b)$ intervalning Jordan o‘lchovini hisoblang.

**Yechish.** $(a; b)$ to‘plamni o‘z ichiga oluvchi $F_1 = [a; b]$ kesmani olamiz. $F_1 = [a; b]$ kesmaning Jordan o‘lchovi $b - a$ ga teng. $F_1$ to‘plamning elementlari ichida kamida bitta $E$ to‘plamning elementi tegishli bo‘lganligi uchun $L_1 = b - a$ ga, $F_1$ to‘plamning barcha elementlari $E$ to‘plamning elementlaridan iborat bo‘lmaganligi uchun $l_1 = 0$ ga teng. Ikkinchi qadanda o‘lchovi $\frac{b-a}{2}$ ga teng bo‘lgan ikkita $F_2^1 = \left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ va $F_2^2 = \left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ to‘plamlarni qaraymiz. $F_2^1$, $F_2^2$ to‘plamlarning

elementlari ichida kamida bitta $E$ to‘plamning elementi bo‘lganligi uchun $L_2 = 2 \cdot \frac{b-a}{2} = b-a$ ga, $F_2^1, F_2^2$ to‘plamlarning barcha elementlari $E$ to‘plamning elementlaridan iborat bo‘lmaganligi uchun $l_1 = 0$ ga teng. Keyingi qadamlarda,

$$L_3 = 4 \cdot \frac{b-a}{4} = b-a,\ l_3 = 2 \cdot \frac{b-a}{4} = \frac{b-a}{2}$$

$$L_4 = 8 \cdot \frac{b-a}{8} = b-a,\ l_4 = 6 \cdot \frac{b-a}{8} = \frac{3(b-a)}{4}$$

.....

$$L_n = 2^n \cdot \frac{b-a}{2^n} = b-a,\ l_n = (2^n - 2) \cdot \frac{b-a}{2^n} = b-a-\frac{b-a}{2^{n-1}},\ n \geq 3$$

.....

ekanligini topamiz.

Jordan o‘lchovi tarifiga ko‘ra, $n$ cheksizga intilganda limitga o‘tib $(a;b)$ intervalning Jordan o‘lchovi $b-a$ ga teng ekanligi kelib chiqdi.

Bu misoldan shuni xulosa qilishimiz mumkinki, $[a;b]$ kesma, $[a;b), (a;b]$ yarim intervallarning Jordan o‘lchovi ham $b-a$ ga teng bo‘ladi.

**2-misol.** Ushbu $E = (-2;1] \cup [2;4] \cup \{6\}$ to‘plamning Jordan o‘lchovini hisoblang.

**Yechish.** $E$ to‘plamni o‘z ichiga oluvchi $F_1 = [-2;6]$ to‘lamni qaraymiz. $F_1 = [-2;6]$ to‘plamning Jordan o‘lchovi 8 ga teng. $F_1$ to‘plamning elementlari ichida kamida bitta $E$ to‘plamning elementi tegishli bo‘lganligi uchun $L_1 = 8$ ga, $F_1$ to‘plamning barcha elementlari $E$ to‘plamning elementlaridan iborat bo‘lmaganligi uchun $l_1 = 0$ ga teng.

Endi o‘lchovi 4 ga teng bo‘lgan ikkita $F_2^1 = [-2;2]$ va $F_2^2 = [2;6]$ to‘plamlarni olamiz. $F_2^1 \cap E \neq \varnothing, F_2^2 \cap E \neq \varnothing$ ekanligidan $L_2 = 2 \cdot 4 = 8$ ga teng bo‘ladi. $F_2^1 \not\subset E, F_2^2 \not\subset E$ ekanligidan $l_2 = 0 \cdot 4 = 0$ ga teng ekanligini topamiz.

Keyingi qadamda o‘lchovi 2 ga teng bo‘lgan to‘rtta $F_3^1 = [-2;0], F_3^2 = [0;2], F_3^3 = [2;4], F_3^4 = [4;6]$ to‘plamlarni olamiz. $E$ to‘plam barcha to‘rtta to‘plamning har biri bilan kesishmasi bo‘sh bo‘lmaganligi uchun $L_3 = 4 \cdot 2 = 8$ ga teng. To‘rtta to‘plamdan $F_3^3 = [2;4]$ to‘plam $E$ to‘plamning qism to‘plami bo‘lganligi uchun $l_3 = 1 \cdot 2 = 2$ ga teng bo‘ladi.

O‘lchovi 1 ga teng bo‘lgan $F_4^1=[-2;-1]$, $F_4^2=[-1;0]$, $F_4^3=[0;1]$, $F_4^4=[1;2]$, $F_4^5=[2;3]$, $F_4^6=[3;4]$, $F_4^7=[4;5]$, $F_4^8=[5;6]$ to‘plamlar uchun yuqoridagi mulohazalar yuritib $L_4=8\cdot 1=8$ va $l_4=4\cdot 1=4$ bo‘lishini topamiz.

Keyingi qadamda o‘lchovi 0,5 ga teng bo‘lgan 16 ta to‘plamni $E$ to‘plam bilan tekshirib chiqamiz. Natijada $L_5=14\cdot 0,5=7$ va $l_5=9\cdot 0,5=4,5$ bo‘ladi. Navbatdagi qadamda o‘lchovi 0,25 ga teng 32 ta to‘plamni tekshirib, $L_6=24\cdot 0,25=6$ va $l_6=19\cdot 0,25=4,75$ ekanligini hisoblaymiz.

$n$-qadamda uzunligi $2^{4-n}$ ga teng bo‘lgan $2^{n-1}$ ta to‘plamni $E$ to‘plam bilan tekshirib chiqamiz. Buning natijada, $L_n=(2\cdot L_{n-1}\cdot 2^{n-5}-4)\cdot 2^{4-n}$, $n\ge 6$ va $l_n=(2\cdot l_{n-1}\cdot 2^{n-5}+1)\cdot 2^{4-n}$, $n\ge 6$ ekanligi kelib chiqadi. Ushbu rekurent formula

$$L_n=L_{n-1}-2^{6-n},\ l_n=l_{n-1}+2^{4-n},\ n\ge 6$$

va $L_5=7,\ l_5=4,5$ ekanligidan

$$L_n=L_5-2^{6-n}-2^{5-n}-...-2^0,\quad l_n=l_5+2^{4-n}+2^{3-n}+...+2^{-2}$$

bo‘lishini topamiz. Bularni soddalashtirib,

$$L_n=5+2^{6-n},\quad l_n=5-2^{4-n}$$

ketma-ketliklarni umumiy hadini aniqlaymiz.

Natijada, $L_n=5+2^{6-n}, n\ge 6$ kamayuvchi, $l_n=5-2^{4-n}, n\ge 6$ o‘suvchi va $L_n>l_n, n\in N$ shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketliklarni hosil qilamiz. Bu ketma-ketliklar yaqinlashuvchi. $n$ cheksizga intilganda ketma-ketliklarni limitini hisoblab,

$$\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}(5+2^{6-n})=5$$

$$\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}(5-2^{4-n})=5$$

ekanligini topamiz.

Jordan o‘lchovi tarifiga ko‘ra, $E=(-2;1]\cup[2;4]\cup\{6\}$ to‘plamning o‘lchovi 5 ga teng ekan.

Endi Jordan manosida o‘lchovli bo‘lmagan to‘plamga misol keltiramiz.

**3-misol.** Ushbu $E=[0;1]\setminus Q$ ($[0;1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar) to‘plamning Jordan o‘lchovini hisoblang.

**Yechish.** Birinchi $E$ to‘plamni o‘z ichiga oluvchi $F_1=[0;1]$ to‘lamni qaraymiz. $F_1=[0;1]$ to‘plamning elementlari ichida $E$ to‘plamning elementlari bo‘lganligi uchun $L_1=1$ ga, $F_1$ to‘plamning barcha elementlari $E$ to‘plamning elementlaridan iborat bo‘lmaganligi uchun $l_1=0$ ga teng. Ikkinchi qadamda $F_2^1=[0;0,5]$ va $F_2^2=[0,5;1]$ to‘plamlarning elementlari ichida $E$ to‘plamning elementlari bo‘lganligi

uchun $L_2 = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ ga, $F_2^1$ va $F_2^2$ to‘plamning barcha elementlari $E$ to‘plamning elementlaridan iborat bo‘lmaganligi uchun $l_2 = 0$ ga teng bo‘ladi. Ratsional sonlar zichlik xossasiga ko‘ra, keyingi qadamlarda ham $L_n = 1$ ga va $l_n = 0$ ga teng ekanligini osongina ko‘rsatish qiyin emas.

$\lim\limits_{n\to\infty} L_n = 1$ va $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 0$ ekanligidan Jordan o‘lchovi tarifiga ko‘ra $E = [0;1] \setminus Q$ to‘plamning Jordan o‘lchovi mavjud emasligi kelib chiqadi.

Bizga ma’lumki, $E = [0;1] \setminus Q$ to‘plamning Lebeg o‘lchovi 0 ga teng. Ushbu $E = [0;1] \setminus Q$ to‘plam Lebeg manosida o‘lchovli va Jordan monasida o‘lchovli bo‘lmagan to‘plamga misol bo‘lar ekan.

**Foydalanilgan adabiyotlar:**

1. Sarimsakov T.A., Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi, “O‘zbekiston” nashriyoti, 1993-y.

2. Sh. Nematova "Matematika fanini o"qitishning nazariy masalalari va metodikasi", "Tafakkur nashriyot" T.: 2011-yil.

3. S.Alixonov "Matematika o"qitish metodikasi". T.: "O"qituvchi" nashriyoti-2008-yil.

4. D.I.Yunusova "Matematikani o"qitishning zamonaviy texnologiyalari" T.: "Fan" nash.-2010-yil.